Ernst Moritz Arndt Universität Greifswald 22. 5. 2009

# Komplexe Netzwerke

Kleine-Welt-Phänomen

Dr. Matthias Scholz

www.network-science.org/SS2009.html

## 5 Kleine-Welt-Phänomen

*small world phenomenon, six degrees of separation*

- Das Kleine-Welt-Phänomen ist eine typische Eigenschaft realer komplexer Netzwerke.
- Die durchschnittliche Weglänge zwischen zwei Knoten ist überraschend kurz (nur 6 oder 7 Kanten) im Vergleich zur Größe und der typischerweise geringen Gesamtvernetzung in realen komplexen Netzwerken.
- Das Kleine-Welt-Phänomen ist nicht auf skalenfreie Netzwerke beschränkt. Es gilt auch für den Zufallsgraphen (Erdős and Rényi, 1960) und für reguläre Strukturen mit zufälligen globalen Querverbindungen wie beispielsweise beim Kleine-Welt-Modell von Watts and Strogatz (1998)).
  Netzwerke in denen das Kleine-Welt-Phänomen nicht auftritt sind reguläre, nur lokal verknüpfte, Strukturen (reguläres Gitter).
- Kurze Wege bewirken eine schnelle Ausbreitung von Informationen (Ideen, Nachrichten), Viren bzw. Gütern (→ Netzwerkfluss)
- Kurze Wege bedeuten auch eine starke Kopplung und Angleichung der einzelnen Elemente (Knoten) im Netzwerk was zu gleichen Knoten-Zuständen oder Verhaltensmustern führt (→ Synchronisation)
- Kritik: Wege, die nicht existieren werden oft nicht betrachtet. Dadurch erscheint auch eine getrennte Welt mit vielen kleinen Teilnetzen als ‘kleine Welt’.
- Statt der mittleren Distanz zweier Knoten wird oft auch die maximale Distanz zweier Knoten in einem Graphen betrachten.

**Weg:** Eine Folge von aneinandergrenzenden Kanten (Kantenzug), der jeden seiner Knoten nur einmal enthält (sich nicht selbst überkreuzt).

**durchschnittliche Weglänge $l$:** oder ***mittlere* Distanz** zweier Knoten. Es ist der Mittelwert über die endlichen Weglängen der kürzesten Wege von allen Knotenpaaren im Graphen. Als unendlich wird eine Weglänge bezeichnet, wenn kein Weg existiert (in nicht zusammenhängenden

Graphen).

**Durchmesser** (*diameter*): Der Durchmesser eines Graphen ist die ***maximale*** **Distanz** zweier Knoten. Es ist die Länge des längsten Weges von allen kürzesten Wegen zwischen zwei Knoten im Graphen.

## 5.1 Beispiele

### Milgrams Kleine-Welt-Experiment 1967

Soziologe Stanley Milgram

Ziel: Nachricht an eine bestimmte Person in Boston schicken
Teilnehmer: ca. 300 zufällig ausgesuchte Personen aus anderen Städten
Aufgabe: Nachricht nur an bekannte Personen (die sie mit Vornamen ansprechen) schicken, von denen sie denken, dass sie der Zielperson näher stehen.

Ergebnis: von 300 Briefen erreichten nur 64 das Ziel mit einer durchschnittlichen Weglänge von etwa 6 Kontakten $\longrightarrow$ *six degrees of separation*

Kritik: zum einen die sehr geringe Datenmenge und zum anderen die vielen unterbrochenen Ketten, die statt einer kleinen Welt eher eine getrennte Welt zeigen.

### Erdős-Zahl

Wie groß ist der Abstand (Weg) im Koautor-Netzwerk zum Mathematiker Paul Erdős?

Paul Erdős selbst hat die Erdős-Zahl 0, alle Koautoren, mit denen er publiziert hat, haben die Erdős-Zahl 1. Autoren, die mit Koautoren von Paul Erdős publiziert haben, haben die Erdős-Zahl 2, usw. Wenn keine Verbindung in dieser Form zu einer Person herstellbar ist, ist deren Erdős-Zahl unendlich.
Es zeigt sich, dass die Erdős-Zahl der meisten Personen entweder unendlich oder sehr klein ist – die 268.000 Personen mit einem endlichen Wert haben eine durchschnittliche Erdős-Zahl von 4,65.

## 5.2 Watts und Strogatz Modell

- Das Kleine-Welt-Modell von Watts and Strogatz (1998) zeigt, wie mit wenigen Querverbindungen aus einem Netzwerk mit langen Wegen ein Kleine-Welt-Netzwerk mit kurzen Wegen entsteht.
- Das Modell beschreibt den Übergang von einer regulären Netzwerkstruktur zu einem Zufallsgraphen. Dabei werden Kanten zufällig neu verknüpft oder neue Kanten zufällig hinzugefügt.
- Das Kleine-Welt-Modell wurde bereits vor der Veröffentlichung über skalenfreie Netzwerke Barabási and Albert (1999) publiziert. Eine Gradverteilung die dem

Potenzgesetz folgt wurde daher in diesem Modell noch nicht berücksichtigt. Eine maximale Neuanordnung der Kanten führt 'nur' zu einem Zufallsgraphen.
- Das Modell hat eher geringen Praxisbezug: Es ist kein Modell für ein skalenfreies Netzwerk und da die Anzahl der Knoten konstant bleibt ist es auch kein Wachstumsmodell.

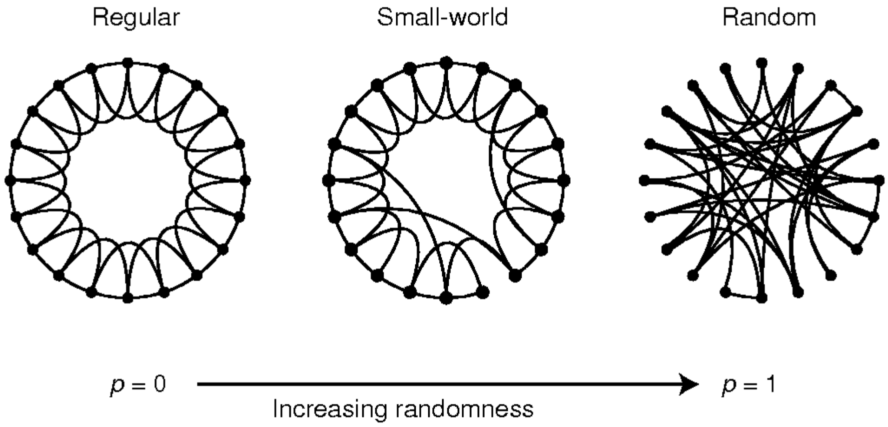


Abbildung 1: Kleine-Welt-Modell von Watts and Strogatz (1998)

### 5.3 Dijkstra-Algorithmus

Gesucht ist der kürzeste Weg von einem Knoten zu einem anderen gegebenen Knoten (oder auch zu allen anderen Knoten).
Die Idee ist, von einem Startknoten aus den kürzest möglichen Weg zu verfolgen (d.h. einen Baum aufzubauen) bis der Zielknoten erreicht ist.

(1) Setze Distanz $d$ des Startknotens $s$ auf 0: $\boldsymbol{d(s) = 0}$
Markiere die Distanz des Startknotens als permanent: $\boldsymbol{X = \{s\}}$
($s$ wird der Menge $X$ der markierten Knoten zugeordnet)
Setze Distanzen $d(v)$ aller unmarkierten Knoten ($v \in V \setminus X$) auf deren Kantenlänge $c(s, v)$ zu Knoten $s$, falls Kante $e(s, v)$ nicht existiert auf $\infty$:
$\boldsymbol{d(v) = c(s, v), \quad \forall v \in V \setminus X}$

(2) wähle einen Knoten $v$ **mit minimaler Distanz** $\boldsymbol{d(v)}$, der noch nicht als permanent markiert ist $\boldsymbol{v \in V \setminus X}$
markiere $v$: setze $\boldsymbol{X = X \cup \{v\}}$

(3) Berechne neue Distanzen $d(w) = d(v) + c(v, w)$ für alle unmarkierten Knoten $\forall w \in V \setminus X$ und aktualisiere, falls neue Distanz $d(w)$ kleiner ist als die aktuelle Distanz $d(v)$:
$\boldsymbol{d(w) = min\{d(w), \quad d(v) + c(v, w)\}}$

(4) Wiederhole 2-3, bis Zielknoten oder bis alle Knoten erreicht sind.

## Literatur

Barabási, A., Albert, R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286:509–512, 1999.

Erdős, P., Rényi, A. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, 5:17–61, 1960.

Watts, D.J., Strogatz, S.H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393: 440–442, 1998. doi: doi:10.1038/30918.